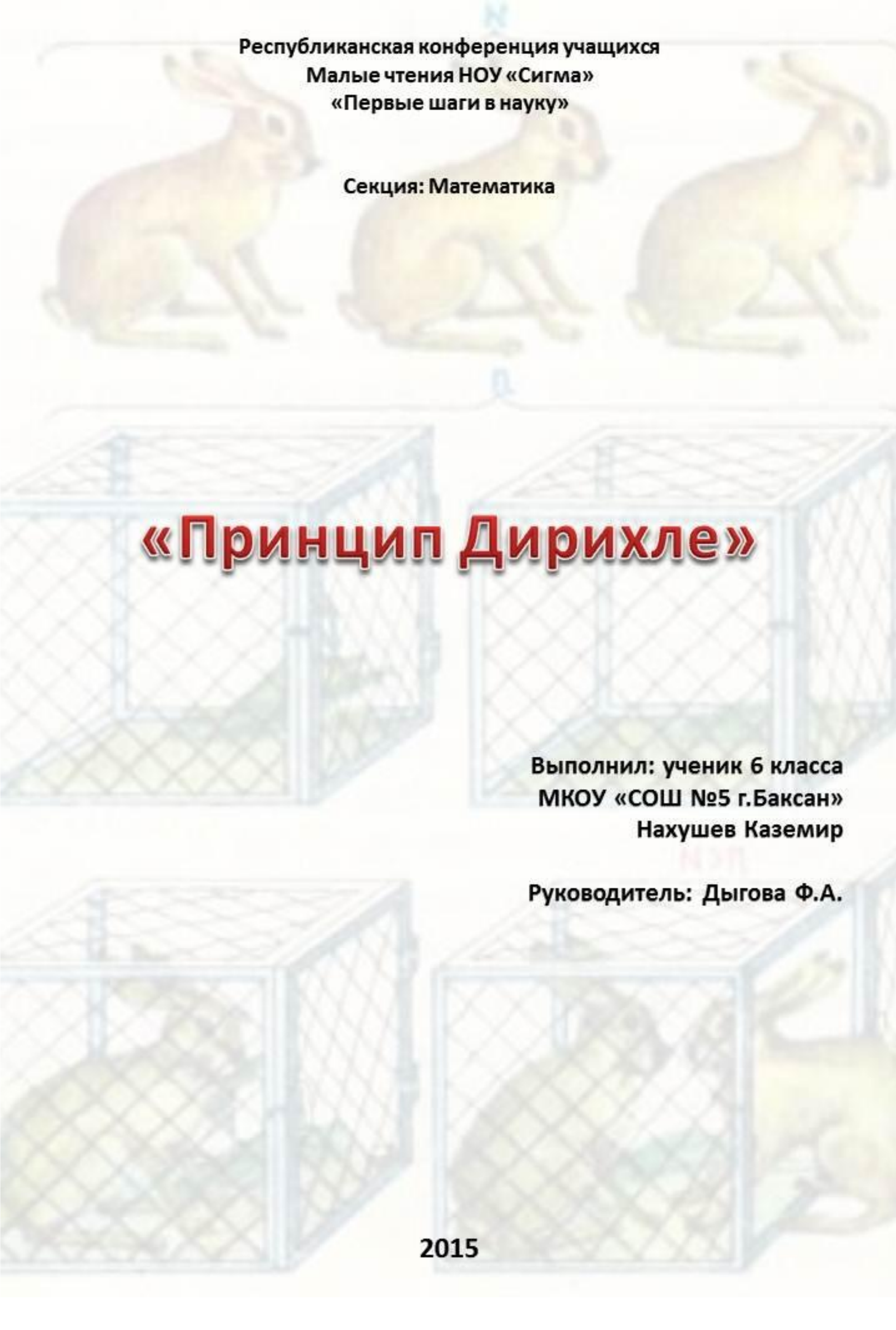


Республиканская конференция учащихся
Малые чтения НОУ «Сигма»
«Первые шаги в науку»

Секция: Математика

«Принцип Дирихле»

Выполнил: ученик 6 класса
МКОУ «СОШ №5 г.Баксан»
Нахушев Каземир

Руководитель: Дыгова Ф.А.

2015

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Пути развития современной математики в значительной мере были предопределены трудами немецкого ученого XIX века Петером Густавом Лежен Дирихле.

Петер Дирихле родился 13 февраля 1805года в Дюрине, Рейнской провинции. В 1822 году он переехал в Париж, где поселился в доме генерала Фау. В семье Фау Дирихле был домашним учителем в течение пяти лет. Здесь ему представился удобный случай познакомиться со многими знаменитыми учеными, философами и математиками. В то же время он изучал труды Гаусса и посещал его лекции.

В 1826 году Дирихле возвратился в Германию, где получил должность приват-доцента в Бреславльском университете (ныне Вроцлавском), а потом переехал в Берлин. Здесь ин был сначала приват-доцентом (1829 год), а затем ординарном профессором (1831 год) в университете. Одновременно он стал преподавателем военного училища[3,6].

В 1855 году Дирихле был приглашен в Геттинский университет в качестве продолжателя Гаусса.

В 1837 году Дирихле был избран иностранным членом-корресподнентом Петербургской Академии Наук[6].

Дирихле утверждал, что в математике большое значение имеют так называемые доказательства существования.

Самый простой способ доказать существование объекта с заданными свойствами - это указать его и, разумеется убедиться, что он действительно обладает нужными свойствами. Например, чтобы доказать, что уравнение имеет решение, достаточно привести какое-то его решение. Доказательство существования такого рода называется прямым или конструктивным.

При решении многих задач используется логический метод рассуждения — «от противного». В данной работе рассмотрена одна из его форм — принцип Дирихле. Этот принцип утверждает, что если множество из N элементов разбито на n непересекающихся частей, не имеющих общих элементов, где N>n то, по крайней мере, в одной части будет более одного элемента. По традиции принцип Дирихле объясняют на примере «зайцев и клеток». Если мы хотим применить принцип Дирихле при решении конкретной задачи, то нам предстоит разобраться, что в ней — «клетки», а что — «зайцы». Это обычно является самым трудным этапом в доказательстве[1].

Цель нашей работы — определить в чем заключается данный принцип и ознакомиться с некоторыми изюминками решения задач на принцип Дирихле.

Исходя из данной цели были сформулированы следующие **задачи**:

- ознакомиться с биографией П. Дирихле;
- определить в чем заключается принцип Дирихле;
- определить в каких случаях применяется данный принцип;
- применить принцип Дирихле при решении различного рода задач.

Актуальность данной темы заключается в том, что принцип Дирихле не рассматривается в учебниках математики. Решая олимпиадные задания, мы заметили, что для решения многих из них часто используется принцип Дирихле, поэтому решили изучить его подробнее.

1 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИНЦИПА ДИРИХЛЕ

1.1 Биография Дирихле

Иоганн Петер Густав Лежён Дирихле (нем. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet; 13 февраля 1805, Дюрен, Французская империя, ныне Германия — 5 мая 1859, Гёттинген, королевство Ганновер, ныне Германия) — немецкий математик, внёсший существенный вклад в математический анализ, теорию функций и теорию чисел. Член Берлинской и многих других академий наук, в том числе Петербургской (1837).

Дирихле (с учетом этимологии его правильнее было бы называть Диришле) родился в вестфальском городе Дюрене в семье почтмейстера. Его предки были выходцами из бельгийского городка Ришле (Richelet), этим обусловлено происхождение необычной для немецкого языка фамилии. Часть фамилии «Лежён» имеет аналогичное происхождение — деда называли «молодым человеком из Ришле» (фр. Le Jeune de Richelet).

В 12 лет Дирихле начал учиться в гимназии в Бонне, спустя два года — в иезуитской гимназии в Кёльне, где в числе прочих преподавателей его учил Георг Ом.

С 1822 по 1827 год жил в качестве домашнего учителя в Париже, где вращался в кругу Фурье.

В 1825 году Дирихле вместе с А. Лежандром доказал великую теорему Ферма для частного случая n=5. В 1827 г. молодой человек по приглашению Александра фон Гумбольдта устраивается на должность приват-доцента университета Бреслау (Вроцлав). В 1829 г. он перебирается в Берлин, где проработал непрерывно 26 лет, сначала как доцент, затем с 1831 г. как экстраординарный, а с 1839 г. как ординарный профессор Берлинского университета[6].

В 1831 году Дирихле женится на Ребекке Мендельсон-Бартольди, сестре знаменитого композитора Феликса Мендельсон-Бартольди.

В 1855 году Дирихле становится в качестве преемника Гаусса профессором высшей математики в Гёттингенском университете. В числе его достижений — доказательство сходимости рядов Фурье[3,6].

Дирихле принадлежит ряд крупных открытий в самых разных областях математики, а также в механике и математической физике.

В анализе и математической физике он ввёл понятие условной сходимости ряда и дал признак сходимости. Доказал разложимость в ряд Фурье всякой монотонной кусочно-непрерывной функции. Высказал плодотворный Принцип Дирихле. Существенно продвинул теорию потенциала[2,6].

В теории чисел доказал теорему о прогрессии: последовательность $\{a + nb\}$, где a, b — взаимно простые целые числа, содержит бесконечно много простых чисел.

Среди учеников Дирихле были: Леопольд Кронекер; Рудольф Липшиц; Фердинанд Эйзенштейн.

Помимо прямых учеников, лекции Дирихле оказали огромное влияние на Римана и Дедекинда.

1.2 Формулировка принципа Дирихле

Принцип Дирихле — утверждение, названное в честь автора немецкого математика, который жил в 19 веке. Данное утверждение устанавливает связь между объектами при выполнении определённых условий. Данный метод автор успешно применял к доказательству арифметических утверждений. Принцип Дирихле применяется в разных разделах математики: в арифметике, в комбинаторике, в геометрии. И в данной работе рассмотрим некоторые изюминки решения задач на принцип Дирихле[6].

Самая популярная формулировка принципа Дирихле звучит так:

ФОРМУЛИРОВКА 1. «Если в n клетках сидит $(n+1)$ или больше зайцев, то найдётся клетка, в которой сидят, по крайней мере, два зайца». Заметим, что в роли зайцев могут выступать различные предметы и математические объекты - числа, отрезки, места в таблице и т.д. [1,2] (рисунок 1).

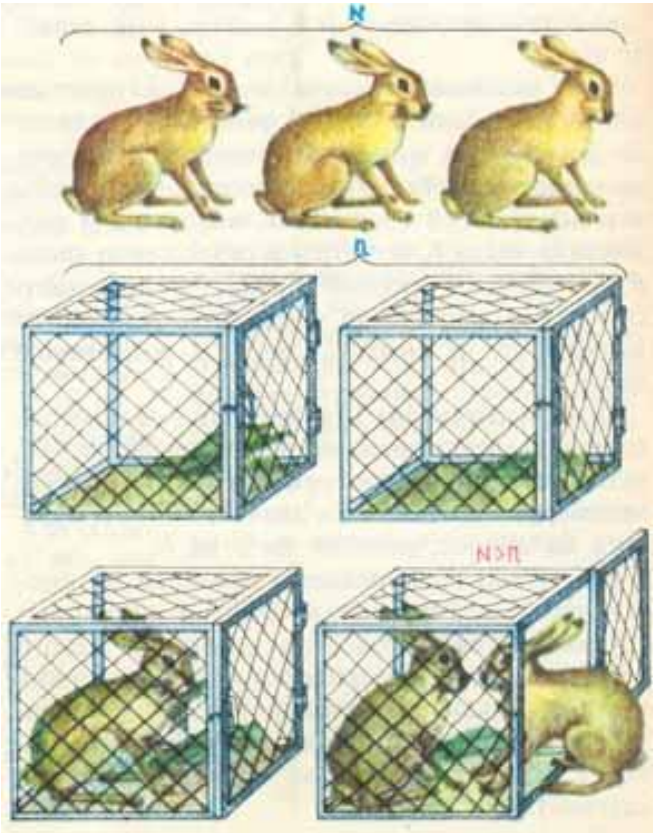


Рисунок 1 – принцип Дирихле

Принцип Дирихле можно сформулировать на языке множеств и отображений.

ФОРМУЛИРОВКА 2. «При любом отображении множества M, содержащего n+1 элементов, во множество N, содержащее n элементов, найдутся два элемента множества M, имеющие один и тот же образ»[1,2].

Несмотря на совершенную очевидность этого принципа, его применение является весьма эффективным методом решения задач, дающим во многих случаях наиболее простое и изящное решение.

Однако во всех этих задачах часто нелегко догадаться, что считать «зайцем», что – «клеткой», и как использовать наличие двух «зайцев», попавших в одну «клетку». С помощью принципа Дирихле обычно доказывается существование некоторого объекта, не указывая, вообще говоря, алгоритм его нахождения или построения. Это даёт так называемое неконструктивное доказательство - мы не можем сказать, в какой именно клетке сидят два зайца, а знаем только, что такая клетка есть.

Принцип Дирихле в теории чисел. Следующую теорему часто используют в школьном курсе алгебры, но доказательство не рассматривают. Его очень просто получить с помощью принципа Дирихле.

ТЕОРЕМА 1. Пусть p, q - натуральные числа, p < q. Если обыкновенную дробь p/q обратить в десятичную, то получится либо конечная, либо бесконечная периодическая десятичная дробь, причём длина периода не превосходит q-1.

Доказательство: Будем делить p на q "уголком" и следить за остатками. Если на каком-то шаге остаток будет нулевым, то получится конечная дробь. Если же все остатки будут отличны от нуля, то рациональное число p/q запишется в виде бесконечной десятичной дроби. Докажем, что она будет периодической. Каждый раз при нахождении очередной цифры частного будет получаться в остатке одно из чисел 1, 2, ..., q-1. Эти возможные значения остатков мы и будем считать «клетками», так что всего имеется q-1 «клеток». «Зайцами» же будут остатки, которые получаются в действительности при выполнении деления.

Рассмотрим первых q «зайцев». Так как их на 1 больше, чем число «клеток», то какие-то два «зайца» попадут в одну «клетку». Другими словами, не позже, чем через q - 1 шагов начнут повторяться остатки, а вслед за этим - и цифры в частном. Действительно, если на некотором шаге повторился остаток, то, приписав как обычно к нему 0, мы получим то же число, что было прежде, а, значит, снесём в частное ту же самую цифру, что и раньше; поэтому наши действия начнут повторяться. Таким образом, получится периодическая десятичная дробь с периодом длиной не более q – 1[5].

2 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРИНЦИПА ДИРИХЛЕ

2.1 Решение задач методом «раскраски»

Одним из методов принципа Дирихле является «раскраска». В этой главе будет браться какое-либо поле и его надо будет или раскрасить, или найти какую-либо не закрашенную фигуру, или же расставить какое-либо количество точек или фигур на данном поле.

Задача 1. Каждая грань куба раскрашена в чёрный или белый цвет. Доказать, что найдутся одинаково раскрашенные грани, имеющие общее ребро.

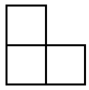
Решение. Рассмотрим любую вершину куба. В ней пересекаются три грани. Примем за «клетки» цвета, а за кроликов грани, пересекающиеся в одной вершине (их три). Поэтому согласно принципу Дирихле найдутся два «кролика» в одной «клетке», а это и означает, что найдутся две грани имеющие общее ребро (так как они имеют общую точку) и окрашенные одинаково[4,с2].

Формула раскраски. Если рассадить n кроликов в n-1 клеток, то найдётся по крайней мере одна свободная клетка. Также может использоваться и другая формулировка: если число клеток больше числа кроликов, то как минимум одна клетка пуста[8].

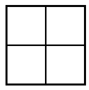
Задача 2. В квадрате составленном из 100 клеток, закрашено менее 50. Доказать, что на не закрашенные клетки можно положить кость домино, покрывающую ровно две клетки[4,с3].

Решение. Чтобы не было свободной пары клеток, в любой строке должно быть не менее пяти закрашенных клеток. Значит всего должно быть не менее закрашенных 50 клеток, чтобы было невозможно выделить свободный участок 1×2. Поскольку закрашенных клеток менее 50, в силу предложения 1 такой участок существует.

Задача 3. На шахматной доске 8×8 расставлена 31 фигура. Доказать, что найдётся свободный треугольник из трёх клеток[4,с3].



Решение. Чтобы не было свободного треугольника, в любом прямоугольнике 2×2



должны быть заняты две клетки, чтобы в него нельзя уже было поместить треугольник. Так как всю доску можно покрыть 16 неперекрывающимися квадратиками 2×2, то всего фигур должно быть 32, а по условию их всего 31. Значит, согласно предложению 1 найдётся квадратик 2×2, в котором окажется только одна фигура, а в ней и содержится свободный треугольник.

2.2 Решение авторских задач

В данной главе будут рассмотрены задачи, разработанные автором самостоятельно с использование принципа Дирихле и аналогичных ему принципов. Для составления данных задач недостаточно взять любые числа, необходимо продумать соотношение исходных данных.

Задача 1. В лесу растёт 10 елок. Общее количество шишек на них 43. Доказать, что найдётся две елки на которых растут по одинаковому числу шишек (на каждом дереве растёт хотя бы по одной шишке).

Решение. За «клетки» примем елки, а за кроликов шишки. Применяя принцип недостаточности получим, чтобы не было двух «клеток», в которых сидят по одинаковому числу «кроликов», всего «кроликов» должно быть не менее 44. По условию задачи их 43, значит найдутся две «клетки» в которых сидят по одинаковому числу кроликов. А это и означает, что в саду растёт две ёлки имеющие по одинаковому числу шишек.

Задача 2. В лесу 30 палаток. В одном из них живёт пять человек, а в любом другом не более пяти человек (в каждой палатке живёт хотя бы один человек). Доказать, что найдутся 8 палаток в которых живут по одинаковому числу человек.

Решение. За «клетки» примем количество человек, живущих в каждой палатке (их 4), а за «кроликов» - количество палаток в лесу (их 29 так как палатка в котором живут пять человек учитывать не будем, потому что такая палатка всего одна). Применяя обобщенный принцип Дирихле, получим, что в одной из «клеток» будет не менее 8 «кроликов», а это и значит, что найдётся 8 палаток, в которых живёт одинаковое количество человек.

Задача 3. На рабочем столе 7 папок и всего в них 8 файлов. Доказать, что найдётся папка, в которой хранятся два файла.

Решение. Пусть «кроликами» будут файлы, а «клетками» - папки. Применяя принцип Дирихле получим, что в одной из «клеток» будет не менее 19 двух «кроликов». А это значит, что найдётся папка, в которой хранятся два файла.

Задача 4. В тире стреляли в квадрат 6×6, и произвели 35 выстрела. Найдётся ли в этой фигуре квадрат 1×1, в котором нет дырки от пули?

Решение. Всего без наложений квадрат 6×6 можно покрыть 36 квадратиками 1×1. Возьмём за «клетки» квадратики 1×1 (их 36), а за «кроликов» - выстрелы (их 35). Применяя формулу раскраски получим, что по крайней мере одна из «клеток» будет свободна. А это и значит, что найдётся квадратик 1×1, в котором нет дырки от пули.

Данные задачи можно использовать на уроках занимательной математики. Также можно предложить учащимся самим составить задачи, т.к. данная деятельность способствует не только более детальному пониманию принципа Дирихле, но и развитию логического мышления, сообразительности, творческому подходу к решению математических вопросов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы были изучены различные научные материалы на принцип Дирихле, решено много интересных задач. Мы познакомились с различными вариациями принципа Дирихле. В ходе исследовательской работы были рассмотрены разные способы решения задач на данные принципы. Мы приобрели опыт решения данных задач, некоторые из них были взяты из олимпиад краевого уровня. Также мной было придумано несколько простых задач на эти принципы. Все поставленные в ходе исследования цели и задачи были достигнуты.

Материал данной работы в дальнейшем поможет учащимся разных классов при решении задач на принцип Дирихле и аналогичные ему принципы. Использованные в работе задачи и их решения являются прекрасным практическим материалом для подготовки к олимпиадам и другим математическим конкурсам. Также эти данные можно использовать на уроках занимательной математики, что позволит развивать у ребят логическое мышление.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агаханов Н.Х., Школьные математические олимпиады, «Издательство Дрофа», 1999 г.
2. Андреев А.А., Горелов Г.Н., Люлев А.И., Савин А.И. "Принцип Дирихле", Самара "Пифагор", 1997г
3. Большая российская энциклопедия
4. Фарков А.В., Математические олимпиады в школе. 5-11 классы, 2009 г.
5. Математика// Первое сентября, 1996, № 7
6. Я познаю мир: Дет. энцикл. Математика.- М.:ООО "Издательство АСТ-ЛТД", 2005
7. https://ru.wikipedia.org/wiki/ [Электронный ресурс]