Олимпиада по математике

Школьный этап

Шойновой Лилии

Задача №1

Пусть первая парабола вторично пересекает ось Ox в точке r, а вторая – в точке $-r$. Тогда по теореме Виета $b = 2019r$, $d = -2019r$, т.е. $b = -d$. Но эти параболы пересекают ось Oy в точках $(0; b)$ и $(0; d)$, откуда и следует требуемое. +

Задача №2.

Решение. Посмотрим на числа 10, 15 и 20. Из условия следует, что их цвета должны попарно отличаться, что невозможно, поскольку цветов всего два. +

Задача №3

Пусть сторона правильного треугольника равна a, а сторона квадрата равна b. Тогда $3a = b^2$ и $4b = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Отсюда $b^4 = 9a^2 = 48\sqrt{3}b$. Получается, что $b^3 = 48\sqrt{3}$, откуда $b = 2\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$ +−

Задача №4

Кармен выедает квадрат 14×14 посередине шоколадки, чтобы ось симметрии квадрата и ось симметрии прямоугольника совпадали. Тогда относительно общей оси симметрии остаток шоколадки делится на 2 одинаковые части. При этом никакой последующий ход не может пересечь ось симметрии. Теперь на каждый ход Малыша Кармен отвечает симметричным ходом. +

Задача №5.

Пусть сторона куба равна $2a$.

$PB_1 = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5}a$

$QB_1 = \sqrt{4a^2 + 4a^2 + a^2} = 3a$

$PR = RQ = PQ = \sqrt{4a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{6}a$

рисунок?

PRQ

Тогда треугольник PQR правильный, откуда $\angle PQR = 60^\circ$. По теореме косинусов

$$\cos \angle PB_1Q = \frac{PB_1^2 + QB_1^2 - PQ^2}{2 \cdot PB_1 \cdot QB_1} = \frac{5a^2 + 9a^2 - 6a^2}{6\sqrt{5}a^2} = \frac{4}{3\sqrt{5}} > \frac{1}{2}, \text{ тогда}$$

$$\frac{1+bc}{a} + \frac{1+ca}{b} + \frac{1+ab}{c} \geqslant a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} > \sqrt{2a^2+2} + \sqrt{b^2+2} + \sqrt{c^2+2}$$

—

Задача №6 $\frac{1+bc}{a}+\frac{1+ca}{b}+\frac{1+ab}{c}>\sqrt{a^2+2}+\sqrt{b^2+2}+\sqrt{c^2+2}$

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}=\frac{c(a^2+b^2)}{ab}\geqslant\frac{2abc}{ab}=2c$$

$$\frac{2bc}{a}+\frac{2ca}{b}+\frac{2ab}{c}\geqslant 2a+2b+2c$$

$$\sqrt{a^2+2}<\sqrt{a^2+2+\frac{1}{a^2}}=\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}\right)^2}=a+\frac{1}{a}$$

+

$b+\frac{1}{b}>\sqrt{b^2+2}$ и $c+\frac{1}{2}>\sqrt{c^2+2}$